

Потенциалы Барманна. Анализ решения

На прошлом занятии для уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

было построено точное решение с $2n$ произвольными параметрами k_j, c_j :

$$u = 2\partial_x^2 \log W(y_1, \dots, y_n), \quad y_j = c_j e^{-X_j} - e^{X_j}, \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 t, \quad (2)$$

где W обозначает вронскиан функций y_j по x . Напомним схему его вывода. Мы требовали, чтобы линейные уравнения

$$\psi_{xx} = -(u + \lambda)\psi, \quad \psi_t = -u_x \psi - 2(2\lambda - u)\psi_x \quad (3)$$

(их совместность эквивалентна КдФ) имели частное решение вида

$$\varphi(z) = e^{-X}\Phi, \quad \Phi(z) = (2z)^n + \varphi_1(2z)^{n-1} + \dots + \varphi_n, \quad X = zx + 4z^3 t, \quad z^2 = -\lambda. \quad (4)$$

Тогда $\bar{\varphi} = \varphi(-z)$ также решение и вронскиан $\varphi, \bar{\varphi}$ является нечётным многочленом от z с постоянными коэффициентами:

$$w = \varphi\bar{\varphi}_x - \varphi_x\bar{\varphi} = zQ(z^2) = z(z^2 - k_1^2)\dots(z^2 - k_n^2), \quad k_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, n;$$

кроме того, в точках $z = k_j$ постоянно отношение $\bar{\varphi}$ и φ :

$$\varphi(-k_j) = c_j \varphi(k_j), \quad c_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Эти соотношения — система линейных алгебраических уравнений относительно φ_i . Потенциал u определяется по её решению согласно формуле $u = \varphi_{1,x}$, которая доказывается подстановкой (4) в (3); это и приводит к формуле (2).

Теперь выясним, при каких k_j, c_j решение (2) будет вещественным, без особенностей и быстроубывающим (для краткости, будем называть такие решения регулярными).

- В дальнейшем будем считать, что все k_j^2 различны и не равны 0, тогда $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ и система (5) невырождена. Также будем считать, не теряя общности, что $c_j \neq 0$, $c_j \neq \infty$. Действительно, в этих случаях из (5) следует, что φ делится на $z + k_j$ или $z - k_j$; на постоянный множитель можно сократить и прийти к случаю с $n - 1$ вместо n .

- Пусть для заданного u есть два решения вида (4): $\varphi(z) = e^{-X}\Phi$ и $\tilde{\varphi}(z) = e^{-X}\tilde{\Phi}$, где Φ и $\tilde{\Phi}$ многочлены по z (возможно, различной степени). Тогда вронскиан

$$w = \varphi\tilde{\varphi}_x - \varphi_x\tilde{\varphi} = e^{-2zx-8z^3t}(\Phi\tilde{\Phi}_x - \Phi_x\tilde{\Phi}) = \text{const},$$

что возможно, только если $w = 0$; также $\varphi\tilde{\varphi}_t - \varphi_t\tilde{\varphi} = -2(2\lambda - u)w = 0$. Значит, Φ и $\tilde{\Phi}$ отличаются лишь постоянным множителем (зависящим от z). Иначе говоря, все решения вида (4) получаются из решения минимальной степени умножением на постоянный многочлен от z . Согласно сказанному выше, этот множитель отбрасывается.

- Пусть функция u вещественна, покажем, что тогда все коэффициенты φ_j также вещественны. Напомним, что они определяются соотношениями

$$\varphi_{1,x} = u, \quad \varphi_{j+1,x} = \varphi_{j,xx} + u\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \varphi_{n,xx} + u\varphi_n = 0. \quad (6)$$

Допустим, что φ_j имеют ненулевые мнимые части, тогда они удовлетворяют такой же, но более короткой последовательности соотношений, что противоречит минимальности степени многочлена Φ .

• Пусть функция u регулярна, докажем, что тогда параметры вещественны. Из (6) следует, что φ_j не имеют особенностей и растут по x не быстрее чем многочлены (так как φ_1 получается интегрированием u и далее на каждом шаге происходит еще одно интегрирование). Допустим, что $k_j = \mu_j + i\nu_j$ и рассмотрим два случая.

1) Если $\mu_j \neq 0$, то $\varphi(k_j)$ равна произведению $e^{-\mu_j x}$ на функцию, растущую по x не быстрее, чем многочлен. Следовательно, функция $\varphi(k_j)$ стремится к 0 на одной из бесконечностей. Но, так как $\varphi(-k_j) = c_j \varphi(k_j)$, то она стремится к 0 и на другой бесконечности, то есть, $\varphi(k_j)$ — *собственная функция* оператора Шрёдингера $H = -\partial_x^2 - u$, а $\lambda_j = -k_j^2$ — собственное значение. Известно, что собственные числа H вещественны.

◀ Напомним доказательство: если $H\psi = \lambda\psi$ и $\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \psi\psi^* dx < \infty$, то

$$\begin{aligned} \lambda\|\psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (-\partial_x^2 - u)(\psi)\psi^* dx = [\text{интегрирование по частям}] = \\ &= (\psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} \psi(-\partial_x^2 - u)(\psi^*) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi H(\psi^*) dx = \lambda^* \|\psi\|^2. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Отсюда следует, что $\nu_j = 0$, то есть $k_j \in \mathbb{R}$, тогда и $c_j = \varphi(-k_j)/\varphi(k_j) \in \mathbb{R}$.

Кроме того, ясно, что $\lambda_j = -k_j^2$ исчерпывают все собственные значения H (так как при других k одно из линейно независимых решений растет на одной бесконечности, второе на другой).

2) Если $\mu_j = 0$, то есть $k_j = i\nu_j$, это рассуждение не проходит. В этом случае

$$X_j = i(\nu_j x - 4\nu_j^3 t) \quad \text{и} \quad c_j = e^{2X_j} \frac{\Phi(-i\nu_j)}{\Phi(i\nu_j)} = 1/c_j^*.$$

Тогда функцию $y_j = c_j e^{-X_j} - e^{X_j}$ представляется как $y_j = \text{const} \cdot \cos(\nu_j x - 4\nu_j^3 t + d_j)$, $d_j \in \mathbb{R}$. Раскладывая вронскиан W в (2) по соответствующему столбцу, получаем

$$W = f(x, t) \cos(\nu_j x - 4\nu_j^3 t + d_j) + g(x, t) \sin(\nu_j x - 4\nu_j^3 t + d_j),$$

где f и g — некоторые многочлены от экспонент и/или косинусов и синусов с другими фазами. Нетрудно видеть, что такая функция обязательно обращается в 0 при некоторых x , то есть, решение имеет в этом случае полюсную особенность.

• Итак, мы показали, что $k_j, c_j \in \mathbb{R}$, причём $\lambda_j = -k_j^2$ — все собственные значения оператора Шрёдингера, $\varphi(k_j)$ — собственные функции. Собственные значения принято нумеровать по возрастанию:

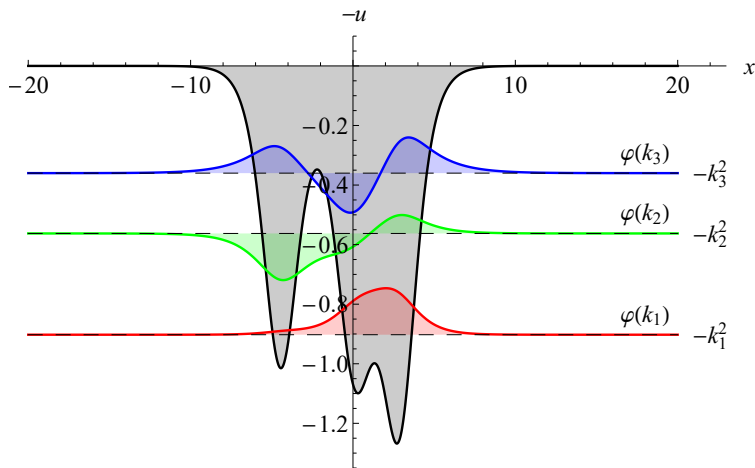
$$\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0.$$

Числа k_j можно взять положительными, без потери общности, тогда они упорядочены по убыванию:

$$k_1 > \dots > k_n > 0.$$

Функция $\varphi(z)$ при вещественных $z > 0$ стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$. Воспользуемся следующими общими свойствами оператора Шрёдингера (они верны для любых регулярных потенциалов, а не только для потенциалов Баргманна):

- выше первого собственного числа $z \geq k_1$ функция $\varphi(z)$ не имеет нулей на оси x ;
- при уменьшении z до 0, нули «заходят» в функцию $\varphi(z)$ через $x = -\infty$, при прохождении z через k_j , и движутся слева направо;
- в результате, $\varphi(z)$ имеет j нулей при каждом $z \in [k_{j+1}, k_j)$ (n при $z \in [0, k_n)$);
- при дальнейшем уменьшении z нули «выходят» через $x = +\infty$, когда z проходит $-k_j$.

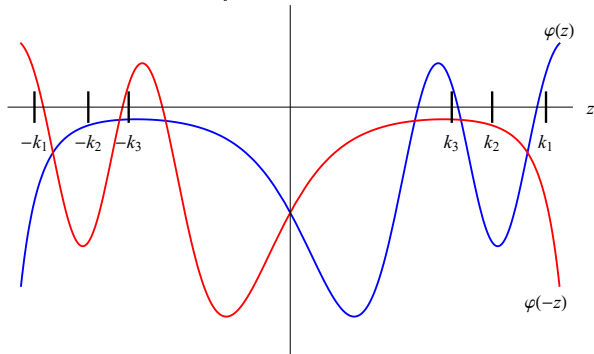


На этом рисунке показаны только собственные функции для некоторого потенциала с тремя собственными значениями $n = 3$. Подробнее за движением нулей можно проследить в файле [05_Bargmann_psi-function.pdf](#)

Отсюда следует, что при каждом фиксированном x функция $\varphi(z)$ имеет ровно n нулей по z , то есть, все корни многочлена $\Phi(z)$ вещественные:

$$\varphi(z) = \text{const} \cdot e^{-zx-4z^3t} (z - r_1(x)) \dots (z - r_n(x)).$$

Кроме того, так как нули «заходят» через $x = -\infty$, то при $x \rightarrow -\infty$ они расположены по одному в каждом из интервалов (k_{j+1}, k_j) , $j = 1, \dots, n-1$. Соответственно, у функции $\varphi(-z)$ нули противоположны по знаку.



Легко увидеть, что функции $\varphi(-k_n)$ и $\varphi(k_n)$ имеют разный знак, а дальше идёт чередование; причём это верно при всех x, t , так как отношение $\varphi(-k_j)/\varphi(k_j)$ постоянно, что и записано в (5). Итак, из регулярности u вытекает следующее правило чередования знаков c_j :

$$\text{sign } c_n = -1, \quad \text{sign } c_{n-1} = 1, \quad \dots, \quad \text{sign } c_1 = (-1)^n.$$

Отметим, что при изменении x или t нули r_j переходят из одного интервала в другой, но при этом всегда в каждый интервал попадает ровно один нуль функции $\varphi(z)$ или $\varphi(-z)$.

Наоборот, можно доказать, что при таком выборе знаков определитель W не обращается в ноль (его можно оценить снизу определителем Вандермонда от k_j).

Удобно сделать замену $c_j = (-1)^{n+1-j} e^{-2d_j}$, занести d_j в экспоненты и переобозначить X_j и y_j . В результате получаем следующее описание n -солитонных решений.

Теорема. Пусть $k_1 > \dots > k_n > 0$, параметры d_j произвольные вещественные числа,

$$y_j = e^{X_j} + (-1)^{n-j} e^{-X_j}, \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 t + d_j,$$

тогда функция $u = 2\partial_x^2 \log W(y_1, \dots, y_n)$ является регулярным решением КдФ. Наоборот, если решение (2) регулярно, то оно приводится к указанному виду с точностью до перенумерации и смены знаков k_j .

Итак, вронскиан составляется по такому правилу: положительные числа k_j упорядочиваются по убыванию, минимальному числу k_n отвечает функция $y_n = \cosh X_n$, числу k_{n-1} функция $y_{n-1} = \sinh X_{n-1}$ и так далее по очереди. С точностью до числового множителя, который совершенно не важен, имеем

$$W = W\left(\cosh X_n, \sinh X_{n-1}, \dots, \frac{\sinh X_1}{\cosh X_1}\right) \quad \begin{array}{l} \text{при чётном } n, \\ \text{при нечётном } n. \end{array}$$

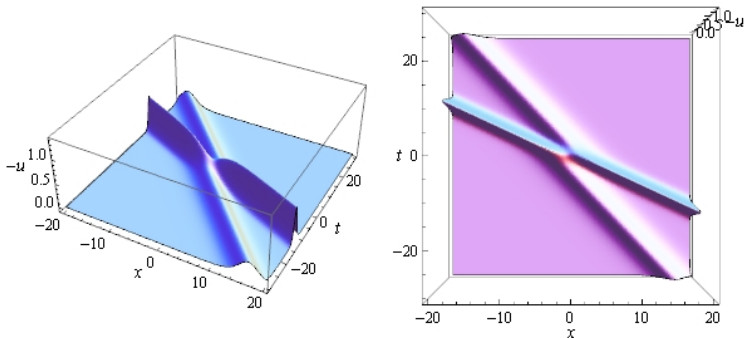
Фазовый сдвиг при взаимодействии солитонов

При $n = 1$ формула (2) даёт солитон КдФ

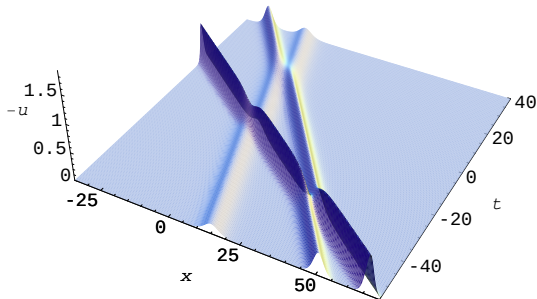
$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2 X}, \quad X = kx + 4k^3t + d.$$

Двух-солитонное решение описывается формулой

$$u = \frac{2(k_1^2 - k_2^2)(k_1^2 - k_2^2 + k_2^2 \cosh 2X_1 + k_1^2 \cosh 2X_2)}{(k_1 \cosh X_1 \cosh X_2 - k_2 \sinh X_1 \sinh X_2)^2}, \quad k_1 > k_2 > 0.$$



Можно видеть, что после прохождения друг через друга солитоны восстанавливают форму, подобно решениям линейного волнового уравнения. Однако, кое-что во взаимодействии солитонов происходит не так, как подсказывает линейная интуиция.



Во-первых, в момент столкновения амплитуды солитонов не складываются, как в линейном случае, а скорее усредняются. При всех x, t верна оценка

$$0 < u(x, t) < 2k_1^2,$$

то есть, решения не превосходит амплитуды самого большого солитона. Это можно доказать для произвольного n , используя формулу (легко выводится из (3))

$$u = 2 \sum_{j=1}^n (k_j^2 - r_j^2),$$

где r_j — нули многочлена $\Phi(z)$; как было отмечено, в каждом из интервалов $[k_{j+1}^2, k_j^2)$ содержится одно из значений r_s^2 .

Во-вторых, после взаимодействия траектории солитонов слегка смещаются, происходит так называемый *фазовый сдвиг* (хорошо заметно при виде сверху). Вычислим его для $n = 2$. Имеем:

$$W = 4 \begin{vmatrix} \cosh X_2 & \sinh X_1 \\ k_2 \sinh X_2 & k_1 \cosh X_1 \end{vmatrix} \\ = (k_1 - k_2)(e^{X_1+X_2} + e^{-X_1-X_2}) + (k_1 + k_2)(e^{X_2-X_1} + e^{X_1-X_2}).$$

В окрестности прямой $X_1 = k_1 x + 4k_1^2 t + d_1 = 0$ имеем оценки (помним, что $k_1 > k_2 > 0$, эквивалентность $\sim$ понимается с точностью до множителя):

$$e^{X_1} \sim 1, \quad e^{X_2} \sim e^{4k_2(k_2^2 - k_1^2)t} = \begin{cases} \infty & \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ 0 & \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Отбрасывая убывающие экспоненты, имеем

$$\begin{aligned} \text{при } t \rightarrow -\infty: \quad W &\sim (k_1 - k_2)e^{X_1+X_2} + (k_1 + k_2)e^{X_2-X_1} \\ &\sim e^{X_2} \left(e^{X_1} + \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} e^{-X_1} \right) \sim e^{X_2} \cosh(X_1 - \delta_{12}), \\ \text{при } t \rightarrow +\infty: \quad W &\sim (k_1 - k_2)e^{-X_1-X_2} + (k_1 + k_2)e^{X_1-X_2} \\ &\sim e^{-X_2} \left(e^{X_1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-X_1} \right) \sim e^{-X_2} \cosh(X_1 + \delta_{12}), \end{aligned}$$

где

$$\delta_{12} = \frac{1}{2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}.$$

Точно так же, рассматривая решение в окрестности прямой $X_2 = 0$ можно получить сдвиг фазы второго солитона $\delta_{21} = -\delta_{12}$.

При $t = -\infty$ большой солитон движется чуть позади прямой $X_1 = 0$ (на расстоянии δ_{12}/k_1 по оси x), а малый солитон впереди прямой $X_2 = 0$ (на расстоянии δ_{12}/k_2); при $t = +\infty$ солитоны движутся на тех же расстояниях от соответствующих прямых, но с другой стороны — большой впереди, малый позади.

Аналогично можно найти фазовые сдвиги и в общем случае, рассматривая решение в полосе вдоль прямой $X_j = 0$. Мы приведем только ответ, без доказательства. Пусть

$$\delta_{ij} = -\delta_{ji} = \frac{1}{2} \log \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j}, \quad i < j.$$

Теорема. Асимптотически, n -солитонное решение представляет собой сумму солитонов

$$u = \sum_{j=1}^n \frac{2k_j^2}{\cosh^2(k_j x + 4k_j^3 t + d_j \pm \delta_j)}, \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

где фазовый сдвиг равен

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \delta_{ji} = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \log \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j} + \frac{1}{2} \sum_{i > j} \log \frac{k_i + k_j}{k_j - k_i}.$$

Итак, при $t \rightarrow -\infty$, решение представляет собой сумму солитонов, упорядоченных слева направо по возрастанию амплитуды и путешествующих со скоростями пропорциональными амплитуде. После взаимодействия порядок солитонов меняется и при $t \rightarrow +\infty$ солитоны располагаются в обратном порядке. При этом они восстанавливают форму и единственным результатом взаимодействия является фазовый сдвиг. Общий сдвиг δ_j , который испытывает один солитон, равен сумме сдвигов δ_{ji} при попарном взаимодействии. Эффекты от тройного взаимодействия отсутствуют.